**SÍNTESIS DE LAS PRUEBAS DE HIPÓTESIS PARA LA MEDIA POBLACIONAL:**

**CASO *σ* CONOCIDA.**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **Prueba de la Cola Inferior** | **Prueba de la Cola Superior** | **Prueba de 2 Colas** |
| **Hipótesis** |  |  |  |
| **Estadístico de Prueba**  **Z Normal Estándar** |  |  |  |
| **Toma de Decisión.** | **Rechazar si** | **Rechazar si** | **Rechazar si**  **o** |

* Primero restamos en la desigualdad

* En seguida multiplicamos la desigualdad por

* Ahora multiplicando la desigualdad por -1 se tiene

* Finalmente tomando en cuenta que tiene una distribución y la definición de obtenemos

Para obtener el número utilizamos las tablas de la distribución t de Student. En este caso las tablas solamente nos dan 10 valores

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Grados de libertad |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Otras tablas de otros libros inclusive dan menos valores. El problema que tenemos con tan pocos valores es que si queremos hacer un ejercicio de prueba de hipótesis o intervalos de confianza en el que interviene un número que no aparece en la tabla, por ejemplo , estaremos imposibilitados para resolverlo. A continuación damos una función seccionada con la que podemos obtener el número que corresponde al área de la distribución en el intervalo , para

Para comprobar estas fórmulas podemos darle a un valor del segundo renglón y las fórmulas deben darnos el número del primer renglón. Por ejemplo con y usando el siguiente código en la calculadora

obtenemos

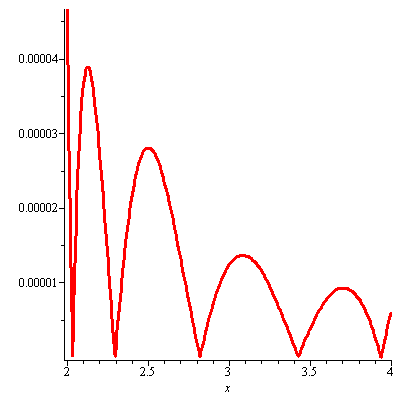
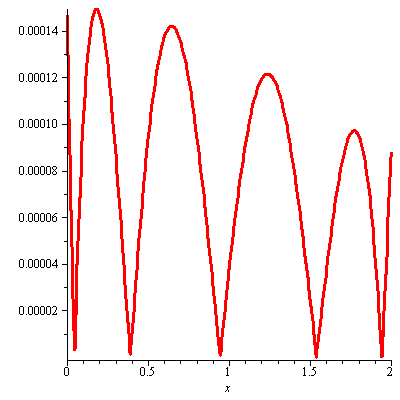
También podemos darle a un número del primer renglón y obtener el número correspondiente del segundo renglón, por ejemplo, supongamos que y utilizando la segunda función racional calculamos el valor de

Para resolver esta ecuación pasamos el denominador al primer miembro

Simplificando obtenemos:

Resolviendo esta ecuación obtenemos las raíces

En las siguientes gráficas presentamos el error absoluto que se comete al aproximar el área de la cola derecha de la distribución t con 17 grados de libertad y las funciones racionales dadas arriba





**Ejemplo 3.** En el pasado, una máquina producía empaques con un espesor medio de 0.050 pulgadas. Para determinar si la máquina funciona de manera correcta, se elige una muestra de 10 empaques para los cuales el espesor medio es de 0.053 pulgadas y la desviación estándar de 0.003 pulgadas. Probar la hipótesis de que la máquina funciona bien con base en un nivel de significancia de 0.01. También obtenga un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza de 0.99.

**Solución.** Primero vamos a hacer la prueba de hipótesis. Para ello hacemos los cuatro pasos.

**Paso 1.** **Formular la hipótesis nula y alterna.** Con las partes del enunciado que dicen “una máquina producía empaques con un espesor medio de 0.50 pulgadas” y “Probar la hipótesis de que la máquina funciona bien” las hipótesis las escribimos como:

**Paso 2. Formar la región critica.** Como la hipótesis alterna es con la región de rechazo de la hipótesis nula debe estar formada por las dos colas en una distribución con 9 grados de libertad. En este caso el nivel de significancia se debe repartir entre las dos colas, es decir, para la cola derecha y otros 0.005 para la cola izquierda. Entonces buscamos el número

Y entonces el número correspondiente para la cola izquierda lo obtenemos por simetría

Así la región de aceptación de la hipótesis nula está formada por el intervalo



**Paso3. Evaluar el estadístico.** En este problema , y entonces el valor del estadístico es

**Paso 4. Tomar una decisión.** Como 3.16 está en la región de aceptación de la hipótesis nula entonces aceptamos la hipótesis nula.

Ahora pasamos a obtener el intervalo de confianza con la misma fórmula que vimos en el ejemplo 1

En esta fórmula y . Por otro lado, como el nivel de confianza que nos piden es del 99% entonces

y

Entonces

Observe que este número ya lo habíamos obtenido cuando hicimos el ejercicio de prueba de hipótesis. Así sustituyendo los valores en la fórmula del intervalo de confianza obtenemos el intervalo

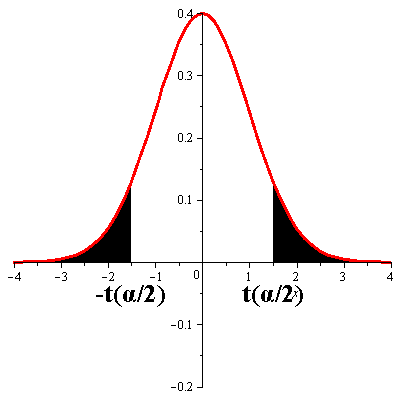
o

Y la probabilidad de que ese intervalo contenga a la media poblacional es del 99%.

**SÍNTESIS DE LAS PRUEBAS DE HIPÓTESIS PARA LA MEDIA POBLACIONAL:**

**Y CON MUESTRAS PEQUEÑAS.**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **Prueba de Cola Inferior** | **Prueba de Cola Superior** | **Prueba de 2 Colas** |
| **Hipótesis** |  |  |  |
| **Estadístico de Prueba**  **T con n-1 grados de libertad.** |  |  |  |
| **Toma de Decisión.** | **Rechazar si** | **Rechazar si** | **Rechazar si**  **o** |

Queremos terminar este tema tratando de responder a las siguientes preguntas:

* ¿cómo se obtiene la tabla de la distribución ?
* ¿cómo obtenemos el valor de , si este número no aparece en las tablas?
* ¿Cómo obtenemos el valor de , si este número tampoco aparece en las tablas?

La respuesta la encontramos utilizando el método de Newton-Raphson

Pues supongamos que buscamos el valor de tal que, en una distribución con ν grados de libertad, deja en la cola derecha un área de o que deja un área de entre y , esto lo podemos escribir como:

entonces aplicamos el método de Newton-Raphson a la función

Así el método de Newton-Raphson toma la forma

Para calcular la integral se puede utilizar la regla de Simpson y el proceso iterativo se puede detener con la instrucción

***for I from 1 to 20 while do***

Como ejemplo de este procedimiento vamos a calcular . Las instrucciones son:

**> **

**> **

**> **

**> **



**> **



**> **

**> **

**>**  **do od**







|  |  |
| --- | --- |
| **Intervalo de Confianza** | **Prueba de Hipótesis** |

|  |  |
| --- | --- |
| 1. **Intervalo, con un Nivel de Confianza de , para Medias de Poblaciones Normales**. **Muestras Pequeñas .**       deja a la derecha de la **Densidad t, con grados de libertad**, un área de . | 1. **Prueba de Hipótesis para Medias de Poblaciones Normales. Muestras Pequeñas .**   , Hipótesis Nula  , Hipótesis Alterna  Se calcula:    donde    Se Acepta la Hipótesis Nula, con un Nivel de Significancia de , si .  **Para Muestras Grandes** , cambiamos por una Distribución Normal Estándar |

**Ejemplo 1.** La siguiente muestra son las puntuaciones de una prueba de IQ obtenidas por 18 alumnos:

130, 122, 119, 142, 136, 127,

120, 152, 141, 132, 127, 118.

150, 141,133, 137, 129, 142.

¿Con un nivel de significancia del 5% pensaría que el IQ promedio de todos los estudiantes es menor a los 135 puntos?

**Solución.** Planteamos la hipótesis nula y la alterna

Ahora calculamos y :

, y

Con esto obtenemos el valor de

Finalmente calculamos en las tablas de la distribución T, con 17 grados de libertad

Por lo tanto se acepta la hipótesis nula y no hay razón para pensar que el IQ de los estudiantes es menor a los 135 puntos.

También podemos obtener un intervalo de confianza del 10% y utilizar la información que ya obtuvimos. Sustituyendo y en la fórmula

obtenemos el intervalo:

|  |  |
| --- | --- |
| Intervalo de Confianza | Prueba de Hipótesis |
| **Diferencia de Medias para Muestras Pequeñas**. Sean y el Tamaño de Muestras de Poblaciones Normales. Suponga que las Medias y Desviaciones Estándar Muestrales son: y . El Intervalo, con un Nivel de Confianza de , para la Diferencia de Medias es    con el número que deja a la derecha de una distribución , con grados de libertad, un área de    y | **Prueba de Hipótesis para Diferencia de Medias de Poblaciones Normales. Muestras Pequeñas y**  , Hipótesis Nula  , Hipótesis Alterna  Se calcula:    Se Acepta la Hipótesis Nula, con un Nivel de Significancia de , si . |

**Ejemplo 1.** Se realizó un estudio para comparar el tiempo requerido por hombres y mujeres para ensamblar un producto. La experiencia indica que la distribución de tiempos tanto para hombres como para mujeres es aproximadamente normal pero la varianza de los tiempos es menor para las mujeres que para los hombres. Una muestra aleatoria para los tiempos de 11 hombres y 14 mujeres produjo los siguientes datos

|  |  |
| --- | --- |
| Hombres | Mujeres |
|  |  |
|  |  |

Probar la hipótesis de que en contra de la alternativa . Utilizar un nivel de significancia de 0.01.

**Solución.**

**Paso 1. Formular la hipótesis nula y alterna.**

**Paso 2. Evaluar el estadístico.**

**Paso 3. Formar la región crítica.** La región crítica está formada por la cola derecha en la distribución con 10 y 13 grados de libertad, entonces .



**Paso 4. Tomar una decisión.** Como aceptamos la hipótesis nula y por lo tanto la desviación estándar del tiempo de ensamblaje es el mismo para hombres y mujeres.

**Ejemplo 2.** En un experimento acerca de la contaminación del aire, se comparan dos tipos de instrumentos para medir la cantidad de monóxido de sulfuro en la atmósfera. Se desea determinar si los dos instrumentos producen mediciones que tienen la misma variabilidad. Se registraron las siguientes lecturas para los dos instrumentos:

|  |  |
| --- | --- |
| Instrumento A | Instrumento B |
| 0.86 | 0.87 |
| 0.82 | 0.74 |
| 0.75 | 0.63 |
| 0.61 | 0.55 |
| 0.89 | 0.76 |
| 0.64 | 0.70 |
| 0.81 | 0.69 |
| 0.68 | 0.57 |
| 0.65 | 0.53 |

Suponiendo que las poblaciones de las mediciones están aproximadamente distribuidas en forma normal, probar la hipótesis de que en contra de la alternativa . Utilizar un nivel de significancia de 0.02.

**Solución.** Lo primero que debemos observar es que nosotros debemos calcular y , para ello debemos usar las fórmulas

**,**

**,**

Estos valores los podemos obtener con la calculadora *CASIO fx-991ES PLUS*, siguiendo los siguientes pasos para el primer grupo de datos

* Paso 1. Metemos los datos en la memoria de la calculadora como sigue: primero tecleamos ***MODE3:STAT***, después tecleamos ***SHIFT1*** y a continuación marcamos ***2:Data***, entonces aparece una tabla en la que vamos escribiendo los datos con su frecuencia

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | FREQ |
| 1 | 0.86 | 1 |
| 2 | 0.82 | 1 |
| 3 |  |  |

Para meter un dato lo escribimos y después tecleamos =. Quitamos la última pantalla con la tecla ***AC.***

* Paso 2. Teniendo los datos en la memoria tecleamos ***SHIFT1*** y seleccionamos ***4:Var*** entonces seleccionamos ***4:sx*** y el signo =, para obtener

Hacemos lo mismo con el segundo conjunto de datos para obtener

Ahora si pasamos a resolver el problema

**Paso 1. Formular la hipótesis nula y alterna.**

**Paso 2. Evaluar el estadístico.**

**Paso 3. Formar la región crítica.** Como la hipótesis alterna es con la región crítica está formada por dos colas y debemos repartir el nivel de significancia 0.02 en dos partes, es decir 0.1 para la cola derecha y otros 0.1 para la cola izquierda en una distribución F con 8 y 8 grados de libertad. Entonces debemos buscar los puntos

punto que deja a la derecha en una distribución F

con 8 y 8 grados de libertad un área de 0.01=6.03

punto que deja a la derecha en una distribución F

con 8 y 8 grados de libertad un área de 0.99

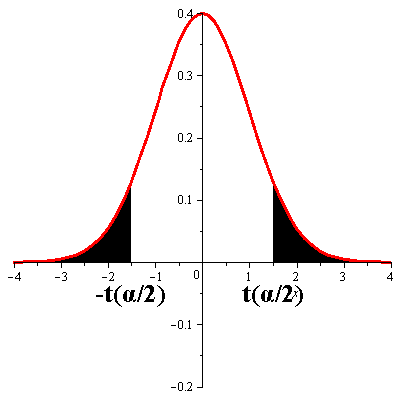
Así la región de aceptación de la hipótesis nula va de 0.16 a 6.03.

**Paso 4. Tomar una decisión.** Como aceptamos la hipótesis nula.

**SÍNTESIS DE LAS PRUEBAS DE HIPÓTESIS PARA LA MEDIA POBLACIONAL:**

**CASO *σ* CONOCIDA.**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **Prueba de Cola Inferior** | **Prueba de Cola Superior** | **Prueba de 2 Colas** |
| **Hipótesis** |  |  |  |
| **Estadístico de Prueba**  **Z Normal Estándar** |  |  |  |
| **Toma de Decisión.** | **Rechazar si** | **Rechazar si** | **Rechazar si**  **o** |

****